FISICA MATEMATICA - 11 settembre 2013 - Corso di Laurea in Matematica

Attenzione: Riconsegnate TRE fogli (protocollo a 4 facciate) su cui sono separatamente svolti i quesiti 1, 2 e 3, con Cognome e Nome e con il Numero (1, 2 e 3) messo in evidenza. Niente brutte copie. Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

1

1.1 Si consideri in campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$

$$Y(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\left(y^2 - x^2(2z+1)\right) \\ x\left(x^2 - y^2(2z+1)\right) \\ 2xy\left(x^2+y^2\right) \end{pmatrix}.$$

a. Si dimostri che le sfere concentriche centrate nell'origine sono varietà invarianti per Y.
b. Si restringa Y alla sfera unitaria, ed usando la proiezione stereografica

$$f : (x,y,z) \to \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

di inversa

$$g : (q,p) \to \left(\frac{2q}{p^2+q^2+1}, \frac{2p}{p^2+q^2+1}, \frac{p^2+q^2-1}{p^2+q^2+1}\right)$$

si dimostri che il campo vettoriale X nel piano $\mathbb{R}^2_{q,p}$, coniugato al campo vettoriale $Y|_{S^2}$, è in ogni punto proporzionale al campo vettoriale $Z(q,p) = (p,q)$. Qual è la funzione che li rende proporzionali? Ci sono punti nei quali bisogna prestare particolare attenzione? (Per lo svolgimento di questo punto ricordiamo che i due campi vettoriali sono coniugati se vale $(Jf\,Y) \circ g = X$, e che durante i passaggi algebrici si può usare liberamente il fatto che $x^2+y^2+z^2=1$.)
c. Si disegni il ritratto in fase del capo vettoriale X.

1.2 Cosa è un sistema del secondo ordine? Cosa è una configurazione di equilibrio per un sistema del secondo ordine? Cosa sono le soluzioni di equilibrio?

2

2.1 - Una sbarretta omogenea AB di massa m e lunghezza $|AB| = \ell$ è vincolata senza attrito sul piano Oxy associato al sistema non inerziale $Oxyz$ rotante uniformemente rispetto agli spazi inerziali con velocità angolare di trascinamento $\underline{\omega} = \omega\hat{y}$ e con l'estremo A incernierato nell'origine O. L'asse y è verticale ascendente, $\underline{g} = -g\hat{y}$. Tra B e la sua proiezione ortogonale B' sull'asse x è tesa una molla di costante elastica $h > 0$. Sia θ l'angolo orientato antiorario dal semiasse negativo delle y alla sbarretta AB. Dopo aver discusso Coriolis, determinato energia potenziale ed energia cinetica, determinare le condizioni sui dati affinché la posizione verticale $\theta = 0$ sia d'equilibrio stabile. Calcolare la frequenza (o le frequenze? spiegare) di piccola oscillazione attorno a tale equilibrio.

2.2 - Si consideri un sistema particellare di masse m_i, $i = 1, \dots, n$, soggetto a forse posizionali $F_i : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^{3n} \ni (OP_1, \dots, OP_i, \dots, OP_n) \mapsto F_i(OP_1, \dots, OP_i, \dots, OP_n) \in \mathbb{R}^3$. Esiste un vincolo olonomo S, $\dim S = N$, $N < 3n$, indip. dal tempo e liscio, di immersione locale: $\mathbb{R}^N \ni (q_1, \dots, q_h, \dots, q_N) \mapsto (\tilde{O}P_i(q))_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{3n}$. Dedurre, in dettaglio, per tale sistema le equazioni di Lagrange dal Principio di D'Alembert.

3

3.1 - Sia P una particella libera, $q \in \mathbb{R}^3$, di massa m e sia $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un'energia potenziale. Sia $k > 0$ una costante positiva. Si postula che i moti dinamicamente possibili per il nostro sistema in studio siano le curve che rendono stazionario il funzionale $q(\cdot) \mapsto J(q(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (\frac{1}{2}m|\dot{q}(t)|^2 - V(q(t)))e^{\frac{k}{m}t}dt$ tra due fissate configurazioni; commentare le equazioni differenziali così trovate, attribuendo un ben preciso significato alla costante k.

3.2 - Sulla sfera di raggio R, usando il principio variazionale, verificare con cura che gli archi di circonferenza di raggio R tra due configurazioni fissate P_0 e P_1 (per semplicità, non siano anti-podali) sono geodetiche, cioè, curve di lunghezza stazionaria.

Soluzione all'esercizio 1

a. Affinché le sfere concentriche siano varietà invarianti bisogna e basta controllare che la funzione $x^2+y^2+z^2$ sia integrale primo del sistema. La derivata di Lie di questa funzione

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y(x^2+y^2+z^2) &= 2xy\left(y^2-x^2(2z+1)\right)+2yx\left(x^2-y^2(2z+1)\right)+2z2xy\left(x^2+y^2\right) = \\ &= 2xy^3-4x^3yz-2x^3y+2yx^3-4xy^3z-2xy^3+4x^3yz+4xy^3z=0\end{aligned}$$

In alternativa, basta calcolare il prodotto scalare di $Y(x,y,z)$ con il vettore (x,y,z) e vedere se sono ortogonali (ma è lo stesso conto).

b. Usiamo la formula richiamata. Deve valere che $(JfY)\circ g(q,p)=X(q,p)$, si ha che

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(1-z)^2}\begin{pmatrix}1-z & 0 & x\\ 0 & 1-z & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\left(y^2-x^2(2z+1)\right)\\ x\left(x^2-y^2(2z+1)\right)\\ 2xy\left(x^2+y^2\right).\end{pmatrix}= \\ &=\frac{1}{(1-z)^2}\begin{pmatrix}y\left(y^2-x^2(2z+1)\right)(1-z)+2x^2y\left(x^2+y^2\right)\\ x\left(x^2-y^2(2z+1)\right)(1-z)+2xy^2\left(x^2+y^2\right)\end{pmatrix}= \\ &=\frac{1}{(1-z)^2}\begin{pmatrix}y^3-2yx^2z-yx^2-y^3z+2yx^2z^2+x^2yz+2x^2y-2x^2yz^2\\ x^3-2xy^2z-xy^2-x^3z+2xy^2z^2+xy^2z+2xy^2-2xy^2z^2\end{pmatrix}= \\ &=\frac{1}{(1-z)^2}\begin{pmatrix}y^3-yx^2z-y^3z+x^2y\\ x^3-xy^2z-x^3z+xy^2\end{pmatrix}= \\ &=\frac{1}{(1-z)^2}\begin{pmatrix}(1-z)(y^3+x^2y)\\ (1-z)(x^3+xy^2)\end{pmatrix}=\frac{1}{1-z}\begin{pmatrix}y(y^2+x^2)\\ x(x^2+y^2)\end{pmatrix}=\frac{1}{1-z}\begin{pmatrix}y(1-z^2)\\ x(1-z^2)\end{pmatrix}=(1+z)\begin{pmatrix}y\\ x\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Componendo con la funzione g si ottiene quindi

$$\left(1+\frac{p^2+q^2-1}{p^2+q^2+1}\right)\begin{pmatrix}\frac{2p}{p^2+q^2+1}\\ \frac{2q}{p^2+q^2+1}\end{pmatrix}=\left(\frac{2p^2+2q^2}{p^2+q^2+1}\right)\begin{pmatrix}\frac{2p}{p^2+q^2+1}\\ \frac{2q}{p^2+q^2+1}\end{pmatrix}=\frac{4\left(p^2+q^2\right)}{\left(p^2+q^2+1\right)^2}\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}$$

Si ha quindi che il coefficiente di proporzionalità è la funzione

$$\frac{4\left(p^2+q^2\right)}{\left(p^2+q^2+1\right)^2},$$

la quale potrebbe eventualmente far si che X abbia un equilibrio nel punto $(p,q)=(0,0)$ che Z non ha. In realtà anche Z ha uno zero in tale punto.

c. Bisogna disegnare il ritratto in fase del campo vettoriale Z che è un campo lineare di matrice $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Molto meglio osservare che si tratta di un repulsore armonico e disegnare direttamente le iperboli con le due bisettrici.

Soluzione all'esercizio 2

2.1 Il lavoro della forza di Coriolis è nullo: velocità angolare ω, velocità dei punti materiali della sbarretta e spostamenti possibili per tali punti, sono tutti complanari, producendo pertanto lavoro (che è sostanzialmente ottenuto integrando, a meno di nota costante moltiplicativa, il prodotto misto degli oggetti ora richiamati) nullo.

$$\mathcal{U}(\theta)=\underbrace{\frac{1}{2}h\ell^2\cos^2\theta}_{elastica}\;\underbrace{-mg\frac{\ell}{2}\cos\theta}_{gravita'}\;\underbrace{-\frac{\omega^2}{2}\mathcal{I}_y(\theta)}_{centrifuga}$$

$\mathcal{I}_y(\theta)$ è il momento d'inerzia della sbarretta, nella configurazione θ, rispetto all'asse di rotazione y. Si calcola prima di tutto il momento d'inerzia della sbarretta, nella configurazione θ, rispetto all'asse y', parallelo a y e passante per il baricentro G della sbarretta: $\mathcal{I}_{y'}(\theta)$. Poi, con Huygens-Steiner si calcola $\mathcal{I}_y(\theta)$. In un sistema solidale alla sbarretta G, XYZ centrato nel baricentro G con X contenente la sbarretta AB e $Z\equiv z$, la matrice associata all'operatore d'inerzia è

$$J=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{m\ell^2}{12} & 0\\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{12}\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{I}_{y'}(\theta) = \frac{1}{2} n^T(\theta)\, J\, n(\theta), \qquad \text{dove il versore } n(\theta) \text{ rappresenta la direzione di } y' \text{ nel sistema } G, XYZ$$

$$n(\theta) = (\cos\theta, -\sin\theta, 0)$$

$$\mathcal{I}_{y'}(\theta) = (\cos\theta, -\sin\theta, 0)^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{m\ell^2}{12} \sin^2\theta$$

$$\mathcal{I}_{y'}(\theta) = m\left(\frac{\ell}{2}\sin\theta\right)^2 + \frac{m\ell^2}{12}\sin^2\theta = \frac{m\ell^2}{3}\sin^2\theta$$

$$\underbrace{-\frac{\omega^2}{2}\mathcal{I}_y(\theta)}_{centrifuga} = -\frac{\omega^2}{2}\frac{m\ell^2}{3}\sin^2\theta$$

$$T(\theta, \dot\theta) = \frac{1}{2} m \frac{\ell^2}{4}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{12}\dot\theta^2 = \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{3}\dot\theta^2$$

$$\mathcal{U}'(\theta) = -h\ell^2 \sin\theta\cos\theta + mg\frac{\ell}{2}\sin\theta - \frac{\omega^2 m\ell^2}{3}\sin\theta\cos\theta$$

$\theta = 0$ è certamente d'equilibrio,

$$\mathcal{U}''(0) = -\left(h\ell^2 + \frac{\omega^2 m\ell^2}{3}\right) + mg\frac{\ell}{2} > 0 \quad : \text{è la condizione sui dati per la stabilità}$$

La frequenza (un'unica frequenza!) di piccola oscillazione $\Omega > 0$ il cui quadrato è:

$$\Omega^2 = \frac{-\left(h\ell^2 + \frac{\omega^2 m\ell^2}{3}\right) + mg\frac{\ell}{2}}{\frac{m\ell^2}{3}}$$

2.1 Vedi dispensa.

Soluzione all'esercizio 3

3.1 Vedi p.132 della dispensa ora in rete.
3.2 In coordinate sferico-polari

$$\begin{aligned} x(\theta, \phi) &= R\sin\theta\cos\phi \\ y(\theta, \phi) &= R\sin\theta\sin\phi \\ z(\theta, \phi) &= R\cos\theta \end{aligned}$$

Una curva localmente è rappresentata da

$$[0, 1] \ni \lambda \mapsto \gamma(\lambda) = (\theta(\lambda), \phi(\lambda))$$

il funzionale lunghezza:

$$\ell(\gamma(\cdot)) = \int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, d\lambda = R\int_0^1 \sqrt{\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\phi^2}\, d\lambda$$

Non è restrittivo prendere i due punti come descritto qui sotto, cioè sull'equatore del sistema di coordinate sferico-polari scelto, questo è dovuto all'invarianza geometrica delle equazioni di Lagrange.

$$P_0 = (\theta_0, \phi_0) = (\pi/2, 0), \qquad P_1 = (\theta_1, \phi_1) = (\pi/2, \phi_f),$$

Equazioni di Lagrange:

$$\theta: \qquad \frac{d}{d\lambda}\frac{\dot\theta}{\sqrt{\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\phi^2}} = \frac{\sin\theta\cos\theta\,\dot\phi^2}{\sqrt{\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\phi^2}}$$

$$\phi: \qquad \frac{d}{d\lambda}\frac{\sin^2\theta\,\dot\phi}{\sqrt{\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\phi^2}} = 0$$

Le curve

$$\gamma_1(\lambda) = (\pi/2, \lambda\phi_f), \qquad \gamma_2(\lambda) = (\pi/2, 2\pi - \lambda(2\pi - \phi_f))$$

si vede facilmente che risolvono le due equazioni di Lagrange.